PRÁCTICA 0: CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

1. Sea J un conjunto bien ordenado, dado α en J se define $S_\alpha = \{\beta \in J : \beta < \alpha\}$. Probar los siguientes enunciados:
   - Para todo α en J, se tiene que S_α y $S_\alpha \cup \{\alpha\}$ son secciones de J.
   - La unión de secciones es una sección.
   - Toda sección propia de J es igual a S_α para algun α en J.

2. **Principio general de definición recursiva**

   Sea J un conjunto bien ordenado y C un conjunto arbitrario. El objetivo es demostrar que si se tiene una forma de extender cada función desde una seccion de J con valores en C a una función desde la sección siguiente entonces se puede extender a todo J.

   Para formalizar lo anterior, fijemos una función

   $$\Phi : \{h : S \to C \text{ tales que } S \text{ es sección propia de } J\} \to C$$

   y decimos que $h : S \to C$, con S sección de J, es *compatible* si $h(\alpha) = \Phi(h|_{S_\alpha})\ \forall \alpha \in S$.

   a) Si S es una sección de J entonces existe a lo sumo una función $h : S \to C$ compatible.

   b) Si $\alpha \in J$ y existe $h : S_\alpha \to C$ compatible entonces existe $\bar{h} : S_\alpha \cup \{\alpha\} \to C$ compatible.

   c) Si $K \subseteq J$ y para todo α en K existe $h_\alpha : S_\alpha \to C$ compatible entonces existe una función
   $$\bar{h} : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C \text{ compatible.}$$

   d) Para todo α en J existe una única $h_\alpha : S_\alpha \to C$ compatible.

   e) Demuestre que existe una única $h : J \to C$ compatible.

3. Asumiendo el teorema del buen orden demuestre que dados conjuntos A y B existe una función $h : A \to B$ inyectiva o una sobreyectiva.

   Sugerencia: En caso que no existe ninguna función sobreyectiva use la existencia de un buen orden en el conjunto A para construir recursivamente una función inyectiva.

4. Asumiendo el teorema del buen orden construya un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que tenga exactamente 2 puntos en cada recta.

   Sugerencia: Primero demuestre que existe un buen orden en el conjunto de rectas en el plano tal que todas sus secciones propias tienen cardinal $< \mathfrak{c}$ y luego use esto para construir recursivamente el conjunto en cuestión.

5. Sean E y F dos conjuntos bien ordenados y sea $h : E \to F$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) La función h preserva el orden y su imagen es una sección de F.

   b) Para todo α en E se tiene que $h(\alpha) = \min\{F \setminus h(S_\alpha)\}$.

   c) Para todo α en E se tiene que $h(S_\alpha) = S_{h(\alpha)}$.

6. Sean E y F conjuntos bien ordenados.

   a) Existe a lo sumo una función $h : E \to F$ que verifica las condiciones del ejercicio anterior.

   b) Si existe $h : E \to F$ que preserva el orden, E tiene el tipo de orden de una sección de F.

   c) Los tipos de ordenes de E y F son el mismo o uno es el de una sección propia del otro.

   d) El tipo de orden de E y el de las secciones propias de E son todos distintos.

   Sugerencia: Para el segundo item defina $h' : E \to F$ mediante $h'(\alpha) = \min\{F \setminus h'(S_\alpha)\}$, usando la existencia de h para ver la buena definición de h'. Para el tercer item construir un conjunto bien ordenado que contenga a E y F para luego usar el item anterior.

7. Demuestre que el lema de Zorn es equivalente al teorema del buen orden usando el principio general de definición recursiva para una implicación y la siguiente estrategia para la otra.

   Dado un conjunto X definamos $\mathcal{A}$ como la familia de todos los pares $(A, \leq)$ de un subconjunto de X con un buen orden. Definimos un orden parcial $\preceq$ en $\mathcal{A}$ de manera que

$$(A, \leq) \preceq (A', \leq') \text{ si } (A, \leq) \text{ es una sección de } (A', \leq').$$

   Ahora, dada una subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que este totalmente ordenada por $\preceq$ sea

$$B' = \bigcup_{(B,\leq)\in\mathcal{B}} B \quad \text{y} \quad \leq' = \bigcup_{(B,\leq)\in\mathcal{B}} \leq$$

   donde del lado izquierdo hay una unión de subconjuntos y del lado derecho una unión de ordenes totales. Muestre que $(B', \leq')$ es un conjunto bien ordenado.

8. Demuestre que el axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden usando los ejercicios anteriores y siguiendo la siguiente estrategia.

   Dado un conjunto X denotemos por $\mathcal{P}'(X)$ el conjunto de sus partes no vacías y fijemos una funcion de elección

$$\Phi : \mathcal{P}'(X) \to X \text{ tal que } \Phi(S) \in S \text{ para todo } S \text{ en } P'(X).$$

   Ahora, definamos una *torre* como un subconjunto T de X con un buen orden con la siguiente propiedad

$$\text{para todo } t \text{ en } T \text{ se tiene que } \Phi(X \setminus S_t(T)) = t$$

   en donde $S_t(T)$ denota la sección del buen orden T relativa a t.

   a) Si $(T_1, \leq_1)$ y $(T_2, \leq_2)$ son dos torres entonces una es una sección de la otra.

   b) Toda torre $(T, \leq)$ es una sección propia de otra torre o $T = X$.

   c) Sea $\{(T_k, \leq_k) : k \in K\}$ la familia de todas las torres y defina

$$T = \bigcup_{k\in K} T_k \quad \text{y} \quad \leq = \bigcup_{k\in K} \leq_k.$$

   donde del lado izquierdo hay una unión de subconjuntos y del lado derecho una unión de ordenes totales. Muestre que $(T, \leq)$ es una torre y concluya que $T = X$.

   Sugerencia: para *a*) tome $h : T_1 \to T_2$ como en el ejercicio 5 y pruebe que $h(x) = x \ \forall x \in T_1$.